Готовимся к ЕГЭ. Некоторые задачи в целых числах.

В.И. Семенов

КРИПКиПРО, Кемерово

[visemenov@rambler.ru]

1. Рассмотрим отдельные задачи, связанные с делимостью чисел. Важными здесь, кроме признаков делимости, являются формулы сокращенного умножения, разложение многочленов на множители, деление многочленов с остатком и т.п.

Задача 1. Корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ –целые числа. Один из них – простое число. Число $f(7)$ также является простым числом. Определить корни уравнения.

Решение. Пусть a, b – корни, и b – простой корень. Тогда $f(x) = (x-a)(x-b)$. В частности, $f(7) = (7-a)(7-b)$. Так как $f(7)$ простое число, то разность $7-a = \pm 1$, а разность $7-b \neq \pm 1$, поскольку b– простое число. Следовательно, $a = 6$ или $a = 8$. Разность $7-b$ должна быть нечетным числом при выбранных значениях a или $7-b = \pm 2$, так как $f(7)$ простое число. Это возможно лишь при одном простом значении $b = 2$ или $b = 5$. Иначе разность $7-b$ будет составным числом. Так как$f(7) \geq 2$, то ответом будут пары $a = 6$,$b = 2$ или $a = 6$,$b = 5$.

Задача 2. Найти все числа, меньшие 100000, которые делятся на 1999, и сумма всех цифр в десятичной записи такого числа равна 30.

Решение. Число натуральных чисел, которые делятся на 1999 и не превосходят 100000, определяется целой частью $\left[\frac{100000}{1999}\right] = 50$. Таким образом, числа следует искать среди произведений: $1999(10k + l)$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $l = 0, 1, ..., 9$. С другой стороны, если $a_5, ..., a_1$– цифры в десятичной записи числа, то оно представляется в виде: $a_5 10^4 + a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$. Сумма цифр в этом числе выделяется представлением:

$$a_5(10^4 - 1) + a_4(10^3 - 1) + a_3(10^2 - 1) + a_2(10 - 1) + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1).$$

Поэтому остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа. Таким образом, остаток от деления числа $1999(10k + l)$ на 9 должен равняться 3 в силу условия задачи. Имеем равенство:

$$1999(10k + l) = 1998(10k + l) + 10k + l.$$

Поэтому среди чисел $10k + l$ выделяем те, которые имеют остаток 3 при делении на 9. Такими числами будут числа: $12, 21, 30, 39, 48$. Из этих пяти выбираем те, которые удовлетворяют условию задачи. Проверку лучше сделать, вычисляя произведение: $(2000 - 1)(10k + l)$. Все пять произведений: $1999 \cdot 12, 1999 \cdot 21, 1999 \cdot 30, 1999 \cdot 39, 1999 \cdot 48$ условию задачи удовлетворяют.

Задача 3. В целых числах решить уравнение: $m^4 - 2n^2 = 1$.

Решение. Уравнение представляем в виде: $2n^2 = (m^2-1)(m^2+1)$. Если $m^2 = 1$, то $n = 0$, и выделяется пара решений; $m = \pm 1, n = 0$. Пусть $m^2 > 1$. Обозначим $m^2 = k$. Так как $2n^2 = (k-1)(k+1)$, то одна из разностей $k-1, k+1$ делится на2. Тогда другая разность тоже делится на 2. Так как числа $k-1, k+1$ - соседние четные числа, то одно из них имеет множителем только первую степень двойки. Пусть это будет число $k-1$. Других общих простых делителей у чисел $k-1, k+1$ нет. (Доказываем от противного). Следовательно, из равенства $2n^2 = (k-1)(k+1)$ следует, что $k-1 = 2\cdot p^2, k+1 = q^2$ с некоторыми натуральными числами p, q. Из последнего равенства выводим: $1 = q^2 - m^2$. Отсюда целые множители $q+m = 1, q-m = 1$ или $q+m = -1, q-m = -1$. Это дает соответственно $m = 0$. Отсюда имеем противоречие с неравенством: $m^2 > 1$. Случай, когда число $k+1$ имеет множителем только первую степень двойки, рассматривается аналогично. Таким образом, в любом случае других решений, отличных от $m = \pm 1, n = 0$, нет.

Задача 4. В натуральных числах решить уравнение: $3^m - 2^n = 1$.

Решение. Натуральная степень тройки оканчивается на цифры $3, 9, 7, 1$, а натуральная степень двойки оканчивается на цифры $2, 4, 8, 6$. Периодичность повторения цифр равна 4. Поэтому показатели степеней делим на 4. Пусть $m = 4k + r, n = 4l + q$, $r, q = 0, 1, 2, 3$. Случаи $m < 4$ или $n < 4$ рассматриваем отдельно и выделяем одно решение: $m = n = 1$. Пусть $m \geq 4$ и $n \geq 4$. Тогда уравнение принимает вид:

$$81^k \cdot 3^r - 16^l \cdot 2^q = 1.$$

Запишем уравнение в виде:

$$(81^k - 1) \cdot 3^r - 16^l \cdot 2^q = 1 - 3^r.$$

Разность $81^k - 1$ делится на 16. Поэтому правая часть $1 - 3^r$ должна делиться на 16. Это возможно, если $r = 0$. Тогда уравнение принимает вид:

$$(81^k - 1) \cdot 1 - 16^l \cdot 2^q = 0.$$

Разность $81^k - 1$ делится на 5. Поэтому $16^l \cdot 2^q$ должно делиться на 5. Это невозможно. Полученное противоречие показывает, что других решений нет.

Задача 5. Найдите все натуральные числа, которые являются степенью двойки и в десятичной записи которых, после вычеркивания первой цифры вновь получается степень двойки.

Решение. Из первых степеней двойки $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ условию задачи удовлетворяют числа $32, 64$. Предположим, что такие числа есть среди не менее, чем трехзначных чисел. Пусть a – старшая цифра этого m – значного числа, $m \geq 3$. Вычеркивание старшей цифры можно представить арифметической операцией:

$$2^n - a \cdot 10^{m-1}.$$

Тогда по условию задачи имеем уравнение в натуральных числах:

$$2^n - a \cdot 10^{m-1} = 2^k,$$

где число 2^k – $(m-1)$– значное. Запишем последнее равенство в виде:

$$2^n - 2^k = a \cdot 10^{m-1}$$

или

$$2^k(2^{n-k} - 1) = a \cdot 10^{m-1}.$$

Правая часть делится на 5. Поэтому разность $2^{n-k} - 1$ должна делиться на 5. Это возможно только в том случае, когда показатель $n-k$ кратен 4, т.е. $n-k = 4l$ (анализируем последнюю цифру, на которую оканчивается степень двойки). Так как $2^n = 2^k 2^{4l}$ и числа 2^n, 2^k отличаются только на один разряд, то множитель 2^{4l} должен быть не более, чем двузначным числом. Так как $l \neq 0$, то единственно возможным значением должно быть $l = 1$. Тогда уравнение принимает вид:

$$2^k(2^4 - 1) = a \cdot 10^{m-1}.$$

Левая часть равенства делится на 5 и не делится на 25, а правая часть делится на 25, поскольку $m \geq 3$. Имеем противоречие, которое показывает, что других решений нет.

2. Другим важным инструментом при решении задач является метод оценок переменных или неизвестных величин. Кроме известного неравенства Коши можно использовать и обычные оценки. Вот некоторые примеры.

Задача 6. Натуральные числа m и n таковы, что числа $m^3 + n$ и $m^3 + m$ делятся на $m^2 + n^2$. Найдите эти числа.

Решение. Из условия следует, что разность чисел $m^3 + n$ и $m^3 + m$ также делится на $m^2 + n^2$. Пусть для определенности $n \geq m$. Тогда частное

$$\frac{n-m}{m^2+n^2}$$

есть неотрицательное целое число. Оно удовлетворяет следующим неравенствам:

$$0 \leq \frac{n-m}{m^2+n^2} \leq \frac{n}{m^2+n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Так как частное

$$\frac{n-m}{m^2+n^2}$$

есть целое число, то оно должно равняться нулю в силу неравенств. Поэтому $m = n$. Далее, частное

$$\frac{m+m^3}{2m^2} = \frac{m^2+1}{2m} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2m}$$

должно быть натуральным числом. Поэтому сумма $\frac{m}{2} + \frac{1}{2m}$ – натуральное число лишь при одном условии: $m = 1$. Случай $n < m$ рассматриваем аналогично. Поэтому условию удовлетворяет единственная пара $n = m = 1$.

Задача 7. Найти натуральные числа n, для которых $n^2 + \alpha^2(n) = 2106$, где $\alpha(n)$ означает сумму всех цифр в десятичной записи числа n.

Решение. Любое натуральное число n из условия задачи удовлетворяет неравенству: $n^2 \leq 2106$. Следовательно, $n \leq 45$. Из всех чисел $1, ..., 9, ..., 19, ...,$ $29, ...39, ...45$ наибольшую сумму цифр имеет число 39. Поэтому $\alpha(n) \leq 12$. Тогда $n^2 + 144 \geq n^2 + \alpha^2(n) = 2106$. Отсюда $n^2 \geq 2106 - 144 = 1952$ или $n > 44$. Остается проверить,что единственно возможное значение $n = 45$ удовлетворяет условию задачи.

Задача 8. При каком наименьшем натуральном n число 2009! не делится на n^n?

Решение. Удобнее сначала ограничиться простыми числами. Пусть p– простое число, для которого 2009! не делится на p^p. Чтобы определить это число, перечислим все натуральные числа, которые делятся на p и не превосходят 2009. Эти числа таковы:

$$p, 2p, 3p, ..., kp.$$

Чтобы отсутствовала делимость числа 2009! на p^p, необходимо выполнение неравенства: $p^2 > 2009$ $(k = p)$. Этому условию удовлетворяет число $p = 47$ и не удовлетворяет $p = 43$. Поэтому для значений $n \leq 43$ делимость числа 2009! на n^n есть. Проверим значения $n = 44, 45, 46$. Так как $44^{44} = 2^{88}11^{44}$, то делимость числа 2009! на число 44^{44} есть. (Среди первых 2009 натуральных чисел есть не менее 88 четных чисел и не менее 44 чисел, которые делятся на 11.) Случаи $n = 45, 46$ разбираются аналогично. Ответом будет $n = 47$.

Задача 9. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти дробь с наименьшим знаменателем.

Решение. Целая часть этих дробей равна двум. Поэтому достаточно определить правильные дроби с наименьшим знаменателем среди правильных дробей, заключенных между $\frac{96}{35} - 2 = \frac{26}{35}$ и $\frac{97}{36} - 2 = \frac{25}{36}$. Имеем оценки: $\frac{26}{35} > \frac{25}{35} = \frac{5}{7} > \frac{25}{36}$. Т.е. $\frac{5}{7} \in [25/36, 26/35]$. Проверим, будет ли какая-нибудь из правильных дробей:

$$1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 6/7$$

лежать в промежутке $[25/36, 26/35]$. Так как $2/3 = 24/36 < 25/36$,то все дроби, не большие $2/3$, отбрасываем. Так как $26/35 < 28/35 = 4/5$, то все дроби, не меньшие $4/5$, следует удалить. Дробь $3/4$ также не входит в промежуток $[25/36, 26/35]$. Таким образом, ни одна из перечисленных дробей не входит в промежуток $[25/36, 26/35]$. Поэтому условию задачи удовлетворяет только одна дробь: $2\frac{5}{7} = \frac{19}{7}$.

3). Рассмотрим несколько задач, где важными являются простейшие комбинаторные навыки.

Задача 10. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей, сумма которых равна 3500. Определить эти числа.

Решение. Каждое натуральное число определяется своими простыми делителями. Если искомое число имеет не менее трех простых делителей p, q, r, то делителями искомого числа будут числа: $1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr$. Их количество больше шести. Поэтому данная ситуация невозможна.

1) Искомое число имеет только один простой делитель p. Тогда все делители состоят из чисел: $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$. Поэтому имеем уравнение в простых числах:

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500.$$

Для чисел $p \geq 5$ левая часть уравнения больше 3500. Оставшиеся два простых числа заведомо корнями уравнения не являются.

2) Искомое число имеет только два простых делителя p, q. Тогда шесть делителей должны быть такими: $1, p, q, pq, q^2, pq^2$. Отсюда выводим уравнение в простых числах:

$$1 + p + q + pq + q^2 + pq^2 = 3500.$$

Оно записывается в виде:

$$(1 + p)(1 + q + q^2) = 3500.$$

Поэтому числа $1 + p, 1 + q + q^2$ – делители числа 3500, причем $1 + q + q^2 = 1 + q(1 + q)$ есть нечетный делитель, не меньший семи. Тогда $1 + p$ делится на 4. Возможные значения множителя $1 + p$ таковы: $4, 4 \cdot 5, 4 \cdot 7, 4 \cdot 5 \cdot 7, 4 \cdot 25, 4 \cdot 125, 4 \cdot 7 \cdot 25, 4 \cdot 7 \cdot 125$. Отсюда соответственно получаем возможные значения p: $3, 19, 27, 139, 99, 499, 699, 2499$. Так как значение p – простое число, то остается всего лишь четыре значения: $3, 19, 139, 499$. Проверим их. Соответственно множитель $1 + q + q^2$ принимает значения: $875, 175, 25, 7$. В простых числах имеет решение только одно уравнение:

$$1 + q + q^2 = 7.$$

Следовательно, $p = 499, q = 2$, и число $n = 1996$.

Примечание. Здесь необязательно решать уравнения $1+q+q^2 = 25$, $1+q+q^2 = 175$, $1+q+q^2 = 875$. Достаточно убедиться, используя простые оценки, что нет соседних натуральных чисел, произведение которых $q(1+q) = 24, 174, 874$. Например, $30^2 = 900$ и $29 \cdot 30 = 870$. Следовательно, если $q \leq 29$ или $q \geq 31$, то условие $q(1 + q) = 874$ не выполняется.

Задача 11. Множество A состоит из натуральных чисел и число его элементов не меньше восьми. Наименьшее общее кратное его элементов равно 210. Произведение всех элементов делится на 1920. Никакие два элемента множества A не являются взаимно простыми, и произведение всех элементов не является точным квадратом. Определить элементы множества A.

Решение. По условию элементы множества A должны быть делителями числа 210. Простые делители этого числа есть числа: $2, 3, 5, 7$. Тогда все делители состоят из чисел:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Так как $1920 = 2^7 3 \cdot 5 \cdot 7$, то следует взять все делители, содержащие 2. Они таковы:

$$2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Их число равно восьми, и их произведение есть точный квадрат. Добавить какой-нибудь делитель из оставшихся делителей, не содержащих 2, нельзя: появляются взаимно простые элементы. Следовательно, хотя бы один из элементов

$$2, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

следует заменить. Заменить можно только элемент 2. Например, заменив составной делитель другим, не содержащим двойки, мы получим взаимную простоту этого делителя с элементом 2. Элемент 2 можно заменить только одним элементом $3\cdot 5\cdot 7$, иначе появятся пары взаимно простых элементов. Таким образом, элементами множества будут делители:

$$3\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

или числа:

$$105, 6, 10, 14, 30, 70, 42, 210.$$